LEZIONE 24

lunedì 21 novembre 2022 09:05

Polinomi di Taylor:

Sia $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, n volte derivabile in $x_0 \in (a,b)$

Il polinomio di Taylor di f di ordine n nel punto x_0 è

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Abbiamo visto:

- $f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$ (TEO. DI PEANO)
- Se $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$ allora
  $T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = 1 + x$

$T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

$T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$

$\vdots$

(POLINOMI DI TAYLOR di e^x in $x_0 = 0$)

$e^x = 1 + o(1)$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$

(SVILUPPI DI TAYLOR di e^x per $x \to 0$)

Calcolo di limiti con Taylor:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}. \qquad \frac{0}{0} \text{ f.i.}$$

Approssimiamo e^x con il suo polinomio di Taylor di ordine 2 per $x \to 0$:

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \cancel{-1} \cancel{-x}}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{2}.$$

$\searrow 0$ per $x \to 0$

Quindi: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Attenzione: Abbiamo risolto il limite usando T_2. Non si può risolvere usando T_1.

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{T_1(x) + o(x) - 1 - x}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} - \cancel{x}}{x^2}$$

$$= \frac{o(x)}{x^2} = \frac{o(x)}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$\searrow 0$

$\nearrow +\infty$ se $x \to 0^+$

$\searrow -\infty$ se $x \to 0^-$

f. i.

Si può risolvere il limite usando T_3:

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \cancel{1} - \cancel{x}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + \frac{o(x^3)}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{6}x \searrow 0$

$\frac{o(x^3)}{x^2} = \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot x$, $\frac{o(x^3)}{x^3} \searrow 0$, $x \searrow 0$

Nota: T_n dipende anche da x_0. Su molti libri T_n viene indicato con $T_{n,x_0}(x)$ o $T_n(x; x_0)$

ESEMPIO

$f(x) = e^x$, $x_0 = 2$

$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \Rightarrow f^{(k)}(x_0) = e^2$

$$T_n(x; 2) = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{e^2}{n!}(x-x_0)^n.$$

Quando $x_0 = 0$, $T_n(x)$ è detto anche POLINOMIO DI MC CAURIN.

$f(x) = \sin x \quad , \quad x_0 = 0$

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f''''(x) = \sin x$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f''''(x) = 0$

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{1}{6}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots\dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+1})$$

$T_0(x) = 0$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = x$

$T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

$T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$

$T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

$\vdots$

$$T_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } m = 0 \\ \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} & \text{se } m = 2k+1 \\ T_{m-1}(x) & \text{se } m \text{ è pari } m \geq 2. \end{cases}$$

Più facile scrivere che

$$T_{2m+1}(x) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$f(x) = \cos x \quad , \quad x_0 = 0$

$f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$ $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$

$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$ $- - - -$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \dots\dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m})$$

Tabella degli sviluppi di Taylor in x_0 :

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{m!}x^m + o(x^m)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+1})$

Nota: qui si può scrivere anche $o(x^{2m+2})$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m})$

- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$

  dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \dots \cdot(\alpha-n+1)}{n!}$

ESEMPIO

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$, $x_0 = 0$. $\quad$ ($(1+x)^\alpha$ con $\alpha = \frac{1}{3}$)

Lo sviluppo di ordine 2 è:

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$$

Lo sviluppo di ordine 3:

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3).$$

Nota: Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$ allora:

$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}x^k$ (non c'è bisogno dell' o)

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON (CASO PARTICOLARE)

ESERCIZI

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{2x \sin x}$$

- $\sin x = x + o(x)$

$$2x\sin x = 2x\,(x+o(x)) = 2x^2+o(x^2)$$

- $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

  $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

  Quindi:

$$e^x - x - \cos x = 1+\cancel{x}+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-\cancel{x}-\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)$$
$$= \cancel{1}+\frac{1}{2}x^2-\cancel{1}+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$
$$= x^2+o(x^2)$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\cos x}{2x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{2x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{2+\frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\,\log(1+x)-x}{2\sqrt{1+x}-\sin x-2\cos x}$$

Denominatore:

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\Big/2\;x^2+o(x^2)$$
$$= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

$$2\sqrt{1+x} = 2+x-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)$$

$$\sin x = x+o(x^2)$$

$$2\cos x = 2\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) = 2-x^2+o(x^2)$$

Quindi:

$$2\sqrt{1+x}-\sin x-2\cos x = 2+\cancel{x}-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)-\cancel{x}+o(x^2)$$
$$-\left(2-x^2+o(x^2)\right)$$

$$= \cancel{2} - \frac{1}{4}x^2 \cancel{-2} + x^2 + o(x^2)$$
$$= \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)$$

Numeratore: $\cos x \log(1+x) - x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\cos x \log(1+x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) + o(x^3) + o(x^4) + o(x^4) = o(x^2)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Quindi:
$$\cos x \cdot \log(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Conclusione:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \log(1+x) - x}{2\sqrt{1+x} - \sin x - 2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3}$$

Domanda: Qual è lo sviluppo di Taylor di e^{-x} in $x_0 = 0$?

Due metodi:

1) Definizione:
$$f(x) = e^{-x}, \quad f'(x) = -e^{-x}, \quad f''(x) = e^{-x}, \quad f'''(x) = -e^{-x} \dots$$
$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -1, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = -1 \dots$$
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2) Sostituzione:
$f(x) = e^{-x}$ $\qquad y = -x$ $\qquad$ se $x \to 0$ anche $y \to 0$.

$$e^{-x} = e^{y} = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \dots + \frac{1}{m!}y^m + o(y^m)$$
$$= 1 - x + \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{6}(-x)^3 + \dots + \frac{1}{m!}(-x)^m + o((-x)^m)$$
$$= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{m!}(-1)^m x^m + o(x^m)$$

Spesso gli sviluppi di Taylor di composizioni di funzioni si possono ricavare per sostituzione da quelli delle funzioni elementari:

ESEMPIO

Cerchiamo lo sviluppo di ordine 5 di $f(x) = \sin(2x)$ per $x \to 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0.$$

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^5}{120} + o((2x)^5)$$
$$= 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + o(x^5)$$
$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0.$$

2) $\sqrt{1+3x^2}$ Cerchiamo lo sviluppo di ordine 4 per $x \to 0$.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$
$$\sqrt{1+3x^2} = 1 + \frac{1}{2}(3x^2) - \frac{1}{8}(3x^2)^2 + o((3x^2)^2)$$
$$= 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}x^4 + o(x^4).$$

3) $f(x) = \log(2+x)$

Cerchiamo lo sviluppo di ordine 3 per $x \to 0$.

$$\log(2+x) = \log(1 + 1 + x) = \log(1+y)$$
$y = 1 + x$

Problema: se $x \to 0$, $y = 1 + x \to 1$.

Per fare in questo modo dovremmo conoscere lo svil. di $\log(1+y)$ per $y \to 1$. NO

Idea più furba:

$\log(2+x) = \log\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) = \log 2 + \log\left(1+\frac{x}{2}\right)$

Se $x \to 0$, $\frac{x}{2} \to 0$ quindi posso usare lo sviluppo di $\log(1+y)$ con $y = \frac{x}{2}$:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\log\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$$

Quindi: $\log(2+x) = \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$

Esempio con $x_0 \neq 0$.

$f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

Idea:

$$\sqrt{x} = \sqrt{4+x-4} = \sqrt{4\left(1+\frac{x-4}{4}\right)} = 2\sqrt{1+\frac{x-4}{4}}$$

Se $x \to 4$ allora $\frac{x-4}{4} \to 0$

Gli sviluppi di $f(x)$ per $x \to 4$ si ricavano da quelli di $\sqrt{1+y}$ per $y \to 0$.

Ad esempio, per lo sviluppo di ordine 2:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\sqrt{1+\frac{x-4}{4}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{x-4}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{x-4}{4}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x-4}{4}\right)^2\right)$$

$$= 1 + \frac{x-4}{8} - \frac{1}{2}\,\frac{(x-4)^2}{64} + o\left((x-4)^2\right)$$

Quindi:

$$f(x) = 2\sqrt{1+\frac{x-4}{4}} = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + o\left((x-4)^2\right) \quad \text{per } x \to 4.$$

ESERCIZIO

Calcolare $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(2x^2) - \log(1-x^3) - \sin x}{x^3\left(\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}}\right)}$

Denominatore

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}} = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) - \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{x}{2}} + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

$$D: \quad -\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)$$

Numeratore:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\cos(2x^2) = 1 - \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^5) = 1 - 2x^4 + o(x^5)$$

- $x\cos(2x^2) = x - 2x^5 + o(x^6)$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

- $\log(1-x^3) = -x^3 + o(x^5)$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$

$$x\cos(2x^2)-\log(1-x^3)-\sin x =$$

$$= \cancel{x} - 2x^3 + x^3 - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$= \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{7}{6}x^3+o(x^3)}{-\frac{1}{4}x^5+o(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\frac{7}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{x^5\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(x^5)}{x^5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\,\frac{\frac{7}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{4}+\frac{o(x^5)}{x^5}} = \text{“}+\infty \cdot \frac{\frac{7}{6}}{-\frac{1}{4}}\text{”} = -\infty .$$